



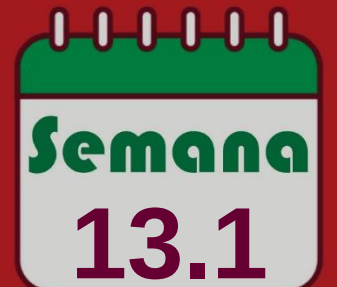
ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA: MATRICES I

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1



Contenido

- Motivación
- Definición de Matriz
- Generación de Matrices con reglas
- Igualdad de Matrices

- Propiedades de los tipos de Matrices
- Operaciones con Matrices:
 - Adición de matrices
 - Sustracción de Matrices
 - Multiplicación de Matrices
 - Potenciación de Matrices

- Tipo de Matrices:
 - Matriz Nula
 - Matriz Cuadrada (Traza de una Matriz)
 - Matriz Diagonal
 - Matriz Escalar
 - Matriz Identidad
 - Matriz Triangular Inferior
 - Matriz Triangular Superior
 - Transpuesta de una Matriz
 - Matriz Simétrica
 - Matriz Antisimétrica
 - Matriz Fila
 - Matriz Columna

MOTIVACIÓN

Uso de la Multiplicación de matrices

Un estadio de futbol tiene tres áreas concesionadas para locales comerciales, ubicadas en el sur, norte y oeste del mismo. Los artículos más vendidos son los cacahuates, los hot dogs y los refrescos. Las ventas para cierto día son registradas en la primera matriz abajo y los precios (en dólares) de los tres artículos aparecen en la segunda.

Número de artículos vendidos

	Cacahuates	Hot dogs	Refrescos	Precio de venta	
Local sur	120	250	305	2.00	Cacahuates
Local norte	207	140	419	3.00	Hot Dogs
Local oeste	29	120	190	2.75	Sodas

MATRIZ

Definición: Una matriz es un arreglo rectangular o tabla de números reales o complejos, llamados elementos y son denotados por a_{ij} , ordenados en filas y columnas, la matriz se denota por letras mayúsculas $A, B, C, \dots etc.$, y tiene la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m filas

n Columnas

Observación 1: La matriz A de elementos a_{ij} tiene m filas y n columnas, además $m \times n$ se denomina orden (tamaño o dimensión). La matriz A pertenece al conjunto $\mathbb{K}^{m \times n}$ o de matrices de orden $m \times n$ y de elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$.

Observación 2: La matriz anterior se denota por medio de corchetes o paréntesis:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n.$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n.$$

Ejemplos de matrices

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix}$ es una matriz de 2 filas y 3 columnas.

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 8 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$ es una matriz de 3 filas y 2 columnas.

$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ es una matriz de 3 filas y 3 columnas.

Generación de Matrices mediante reglas

Ejemplo: Dada la matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 3} / a_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{Si } i = j \\ i - j, & \text{Si } i \neq j \end{cases}$

Halle los elementos de la matriz A .

Resolución:

Fila 1:

$$a_{11} = 1 + 1 = 2$$

$$a_{12} = 1 - 2 = -1$$

$$a_{13} = 1 - 3 = -2$$

Fila 2:

$$a_{21} = 2 - 1 = 1$$

$$a_{22} = 2 + 2 = 4$$

$$a_{23} = 2 - 3 = -1$$

Fila 3:

$$a_{31} = 3 - 1 = 2$$

$$a_{32} = 3 - 2 = 1$$

$$a_{33} = 3 + 3 = 6$$

Igualdad de Matrices

Dos matrices A y B son iguales, denotado por $A = B$, si tienen el mismo orden y si sus elementos correspondientes coinciden o son iguales.

Así la igualdad de dos matrices $m \times n$ equivale a un sistema de mn igualdades, una por cada par de componentes.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, \dots, m; \forall j = 1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, \dots, a_{1n} = b_{1n} \\ a_{21} = b_{21}, a_{22} = b_{22}, \dots, a_{2n} = b_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} = b_{m1}, a_{m2} = b_{m2}, \dots, a_{mn} = b_{mn} \end{cases}$$

63. Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} x-3y & x \\ 1 & y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 6-y \\ 1 & 6-x \end{bmatrix}$$

Si $A = B$. Hallar el valor de $x^y + y^x$.

A) 8

B) 4

C) 6

D) 11

E) 10



TIPOS DE MATRICES

1) Matriz Nula

Una matriz se dice nula, si todos sus elementos o entradas son iguales a cero. La notación de la matriz nula de orden $m \times n$ se denota por $m \times n$ es $O_{m \times n}$

Ejemplo:

Una matriz nula de dos filas y tres columnas será así

$$O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Matriz Cuadrada

Una matriz cuadrada es la que tiene el mismo número de filas que de columnas. Se dice que una matriz cuadrada $n \times n$ es de orden n y se le asigna el nombre matriz cuadrada n .

Ejemplo:

Veamos una matriz cuadrada de orden 3:

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Nota:

La diagonal (o diagonal principal) de $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ consiste en los elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diagonal principal

TRAZA DE UNA MATRIZ

Definición: La traza de una matriz cuadrada A , denotado por $Tr(A)$, es la suma de los elementos diagonales, es decir,

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{k=1}^n a_{kk}$$

Ejemplo:

Dada la matriz cuadrada $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 9 \\ 2 & 7 & 4 \\ 9 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

La traza de A será:

$$Tr(A) = 5 + 7 + 4 = 16$$

TIPOS ESPECIALES DE MATRICES CUADRADAS

3) Matriz Diagonal

Una matriz cuadrada $D = [d_{ij}]_{n \times n}$ es diagonal, si todas sus entradas no diagonales son nulas (o ceros). Tal matriz se denota frecuentemente por $D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$, donde algunos o todos los d_{ii} pueden ser ceros.

Ejemplo:

Matriz diagonal de orden 2

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \text{diag}(5; 7)$$

Matriz diagonal de orden 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \text{diag}(2; 4; 6)$$

4) Matriz Escalar

Una matriz cuadrada $E = [e_{ij}]_{n \times n}$ es escalar, si es una matriz diagonal y todas sus entradas diagonales son iguales.

Ejemplo: Se muestra dos matrices escalares, la primera tiene en su diagonal el valor 8 y la segunda tiene en su diagonal el valor 2.

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5) Matriz Identidad

Una matriz cuadrada se dice que es una matriz identidad (se denota por $I_{n \times n}$ o I_n), si es una matriz escalar, donde todas las entradas diagonales son iguales a 1.

Ejemplo: Tenemos dos matrices identidades de orden 2×2 y de orden 3×3

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6) Matriz Triangular Inferior

Una matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ es una matriz triangular inferior, si todas sus entradas sobre la diagonal principal son iguales a cero, es decir, $\forall i < j: a_{ij} = 0$

Ejemplo: Se muestra dos matrices triangulares inferiores cuadradas, una de orden 2×2 y la otra de orden 3×3

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

7) Matriz Triangular Superior

Una matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ es una matriz triangular superior, si todas sus entradas bajo la diagonal principal son iguales a cero, es decir, $\forall i > j: a_{ij} = 0$

Ejemplo: Se presentan dos matrices triangulares superiores cuadradas, de orden 2×2 y 3×3

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Transpuesta de una Matriz

La transpuesta de una matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, denotada por $A^T = [a_{ij}^T]_{n \times m}$, es la matriz obtenida escribiendo las filas de A , en orden, como columnas, es decir, $a_{ij}^T = a_{ji}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la Traza y Transpuesta

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y A, B, C matrices, de orden adecuado para que las operaciones estén bien definidas, se cumple:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. $(A^n)^T = (A^T)^n, n \in \mathbb{N}$
6. $\text{Tr}(\alpha A) = \alpha \text{Tr}(A)$
7. $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$
8. $\text{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{Tr}(A) + \beta \text{Tr}(B)$
9. $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

8) Matriz Simétrica

Una matriz A es simétrica, si $A^T = A$. Es decir se deduce que $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ es cuadrada y los elementos simétricos (respecto a la diagonal) son iguales ($\forall i, \forall j : a_{ij} = a_{ji}$).

Ejemplo: Veamos si la siguiente matriz es simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = A$$

$\therefore$ La matriz A es simétrica

9) Matriz Antisimétrica

Una matriz A es antisimétrica, si $A^T = -A$. Es decir:

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ es antisimétrica, si $\forall i, \forall j : a_{ij} = -a_{ji}$. Los elementos diagonales de una matriz antisimétrica deben ser ceros, ya que si $j = i$ entonces: $a_{ii} = -a_{ii}$, implica $a_{ii} = 0$.

Ejemplo: Veamos si la siguiente matriz es antisimétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 3 & 0 & -5 \\ -7 & 5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -7 \\ -3 & 0 & 5 \\ 7 & -5 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = -A$$

$\therefore$ La matriz A es antisimétrica

10) Matriz fila

Una matriz F se dice que es una matriz fila, si tiene una única fila y tiene la siguiente forma: $F_{1 \times n} = [f_{11} \ f_{12} \ \dots \ f_{1n}]$

Ejemplo: Se muestra una matriz fila con 6 columnas

$$F_{1 \times 6} = [2 \quad -4 \quad -3 \quad 9 \quad -1 \quad 7]$$

11) Matriz Columna

Una matriz C se dice que es una matriz columna, si tiene una única columna y tiene la siguiente forma:

$$C_{m \times 1} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Se muestra una matriz columna con 3 filas

$$C_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Propiedades:

1) $(A^T)^T = A$

2) $I^T = I$

3) La transpuesta de una matriz nula es otra matriz nula:

$$(O_{m \times n})^T = O_{n \times m}$$

4) Si D es una matriz diagonal, entonces D es una matriz simétrica:

$$D^T = D$$

5) Si E es una matriz escalar, entonces E es una matriz simétrica:

$$E^T = E$$

6) Si D es una matriz diagonal, si y solo si, D es una matriz triangular (inferior y superior).

7) La transpuesta de una matriz fila es igual a una matriz columna:

$$(F_{1 \times n})^T = C_{n \times 1}$$

8) La transpuesta de una matriz columna es igual a una matriz fila:

$$(C_{m \times 1})^T = F_{1 \times m}$$

67. Si P , Q y X son matrices cuadradas tal que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & y+z & 0 \\ -2 & 5 & z \\ y & z & 3 \end{pmatrix} \quad \text{es simétrica,}$$

$Q = (q_{ij})_{3 \times 3} / q_{ij} = 2j - i$ si $i < j$ es antisimétrica que satisfacen la siguiente ecuación matricial

$$2P - P^T + Q + Q^T = X + 3P, \quad \text{entonces la } \text{Tr}(X) \text{ es:}$$

A) -18

B) -14

C) 0

D) 14

E) 18

ADICIÓN DE MATRICES

Definición:

Sean las matrices $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$, se define la matriz $A + B$ como una matriz de orden $m \times n$ que tiene la siguiente forma

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Ejemplo: Sean las matrices $A, B \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 + 6 & 7 + 3 \\ -5 + 4 & 1 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$$

SUSTRACCIÓN DE MATRICES

Definición:

Sean las matrices $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$, se define la matriz $A - B$ como una matriz de orden $m \times n$ que tiene la siguiente forma

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$$

Ejemplo: Sean las matrices $A, B \in \mathbb{K}^{2 \times 3}$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 8 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 6 - (-5) & 9 - 3 & 2 - 8 \\ 3 - (-1) & 0 - 5 & 1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 6 & -6 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Definición:

Sean las matrices $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $B = (b_{jk}) \in \mathbb{K}^{n \times p}$, se define la matriz AB como la matriz de orden $m \times p$ de la forma siguiente

$$AB = (c_{ik}) \in \mathbb{K}^{m \times p},$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

Donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo.

Ejemplo: Sean $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (1)(1) + (5)(1) + (0)(0) & (1)(3) + (5)(4) + (0)(1) \\ (1)(1) + (1)(1) + (1)(0) & (1)(3) + (1)(4) + (1)(1) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 23 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Propiedades

Sean A , B y C matrices, de orden adecuado para que las operaciones estén bien definidas, se cumple:

1. $(AB)C = A(BC)$ (Asociativa)
2. $(A + B)C = AC + BC$ (Distributiva)
3. $A(B + C) = AB + AC$ (Distributiva)
4. $(a + b)A = Aa + bA$, a y b escalares
5. $AI_n = I_m A = A$, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

POTENCIA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Definición:

Sea la matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $m \in \mathbb{N}$, se define

$$A^m = A \cdot A \cdot \dots \cdot A \text{ ("m" veces)}$$

Ejemplo: Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 125 \end{bmatrix}$$

MATRICES CONMUTABLES

Definición

Se dice que las matrices $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ conmutan o son matrices conmutables si:

$$AB = BA$$

Teorema

Si A y B son matrices conmutables, entonces

1. Las potencias de A y B conmutan.
2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Observación:

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

61. Dada la matriz: $M = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$, entonces

el valor de M^{1003} es:

A) αM

B) $\alpha^{1000} M$

C) αI_2

D) $\alpha^{1002} M$

E) $\alpha^{2003} M$

Propiedades de Matriz Triangular Superior

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si A y B son matrices triangulares superiores, entonces

1. $A + B$ es una matriz triangular superior.
2. αA es una matriz triangular superior.
3. $\alpha A + \beta B$ es una matriz triangular superior.
4. AB es una matriz triangular superior.

Propiedades de Matriz Triangular Inferior

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si A y B son matrices triangulares inferiores, entonces

1. $A + B$ es una matriz triangular inferior.
2. αA es una matriz triangular inferior.
3. $\alpha A + \beta B$ es una matriz triangular inferior.
4. AB es una matriz triangular inferior.

Propiedades de Matriz Simétrica

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$.

1. Si A y B son matrices simétricas, entonces
 - a) $A + B$ es una matriz simétrica.
 - b) αA es una matriz simétrica.
 - c) $\alpha A + \beta B$ es una matriz simétrica.
2. Si A es una matriz simétrica, entonces A^m es una matriz simétrica.
3. La matriz $A + A^T$ es una matriz simétrica.

Propiedades de Matriz Antisimétrica

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$.

1. Si A y B son matrices antisimétricas, entonces
 - a) $A + B$ es una matriz antisimétrica.
 - b) αA es una matriz antisimétrica.
 - c) $\alpha A + \beta B$ es una matriz antisimétrica.
2. Si A es una matriz antisimétrica, entonces
 - a) A^m es una matriz simétrica, si m es par.
 - b) A^m es una matriz antisimétrica, si m es impar.
3. La matriz $A - A^T$ es una matriz antisimétrica.

Teorema

Toda matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se puede expresar de forma única como la suma de una matriz simétrica y antisimétrica, es decir,

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$$

Nota: Toda matriz cuadrada se puede expresar como la diferencia de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

MATRIZ IDEMPOTENTE

Definición

Sea la matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se dice que A es una matriz idempotente si:

$$A^2 = A$$

Ejemplo: Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ INVOLUTIVA

Definición

Sea la matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se dice que A es una matriz involutiva si:

$$A^2 = I_n$$

Ejemplo: Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Ejemplo: Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

MATRIZ NILPOTENTE

Definición

Sea la matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se dice que A es una matriz nilpotente si:

$$\exists m \in \mathbb{N}, A^m = 0_{n \times n}$$

Además se define el orden o índice de nilpotencia de la forma siguiente:

$$h = \min\{m \in \mathbb{N} \mid A^m = 0_{n \times n}\}$$

Ejemplo: Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2 \times 2}$$

El índice de nilpotencia es 2.

MATRIZ ORTOGONAL

Definición:

Sea la matriz $A \in K^{n \times n}$ se dice que A es una matriz ortogonal si:

$$AA^T = A^T A = I_n$$

Ejemplo: Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Ejemplo: Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = A^T A = I_3$$

Ejercicio

Sean A y B dos matrices que satisface $A + B = AB$.
Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- I. A y B son matrices cuadradas.
- II. Si $AB = I$, entonces $A^3 = I$
- III. Si $B = A^2$, entonces $A + 2A^2 = A^4$

Respuesta:

- I. Verdadero
- II. Falso
- III. Verdadero

